数理解析研究所講究録
909 巻 1995 年 160-168

Shintani Functions and Rankin-Selberg Convolution

II. Global Theory

京都産業大・理 村瀬篤 (Atsushi Murase)
広島大・理 菅野孝史 (Takashi Sugano)

このノートでは，Rankin-Selberg convolution を 新谷関数を用いて表示することによって，古典群上の保型形式に付随する標準的L関数を行列サイズについて帰納的にとらえる．完全に閉じた形で求められている定値直交群の場合を中心に述べ，最後にユニタリ群の場合に触れることにする（定値直交群の場合，詳しくは [5] を参照されたい）．

§1. Local Theory 補足

帰納的な議論の為に，Part I で扱った split case を少し一般化しておく．k を $\mathfrak{p}$-進体，$\mathfrak{o}$ を k の整数環とする．$\mathfrak{o}^m$ が m 次偶対称行列 $S\in M_m(\mathfrak{o})$ に関し，極大 $\mathfrak{o}$-integral lattice となるとき，S を単に $\mathfrak{p}$-maximal と呼ぶことにする．これは，$S[g^{-1}]={}^tg^{-1}Sg^{-1}$ が任意の $g\in M_m(\mathfrak{o})\cap GL_m(k)-GL_m(\mathfrak{o})$ に対して偶対称行列でないということと同値．

G を S の直交群，$K=G\cap GL_m(\mathfrak{o})$ とし，K の指数有限正規部分群 K^* を，

$$K^*=\left\{u\in K\;\middle|\;(u-1)S^{-1}\in GL_m(\mathfrak{o})\right\}$$

と定義する．商群 $E=K/K^*$ は，単位群，位数 2 の巡回群，位数 $2(q+1)$ の二面体群のいずれかに同型となる（ここで，q は剰余体 $|\mathfrak{o}/\mathfrak{p}|$ の位数）．G の K^* に関する Hecke 環

$$\mathcal{H}(G,K^*)\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{\phi:G\longrightarrow \boldsymbol{C}\;\middle|\;\phi(u_1gu_2)=\phi(g)\quad {}^\forall u_1,u_2\in K^*,\ \mathrm{supp}\,\phi:\mathrm{compact}\right\}$$

については，通常 $\mathcal{H}(G,K)$ の場合（cf. [8]）と同様にして構造が調べられる．特に，

$$\mathcal{H}(G,K^*)\cong \boldsymbol{C}[E][X_1^{\pm1},\ldots,X_\nu^{\pm1}]^{W_\nu}\qquad (\nu:\text{Witt index of } S,\ W_\nu:\text{Weyl group})$$

を知る．また，$\mathcal{H}(G,K^*)$ の中心 $\mathcal{H}^+$ から，$\boldsymbol{C}$ への algebra homomorphism λ（指標）は，$k^\times$ の ν 個の不分岐指標の組（modulo W_ν）$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)$ と，有限群 $E=K/K^*$ の既約表現（の同型類）ρ の対 $(\boldsymbol{\lambda},\rho)$ で記述される．これを λ の Satake parameter と呼ぶ．

$\mathcal{H}^+$ の指標 λ に対して，その標準的L関数を次の様に定義する．

$$\begin{aligned}L_\mathfrak{p}(\lambda;s)&=L_\mathfrak{p}^0(\lambda;s)A_{\rho,\mathfrak{p}}(s),\\ L_\mathfrak{p}^0(\lambda;s)&=\prod_{j=1}^{\nu}\left\{(1-\lambda_j(p)q^{-s})(1-\lambda_j^{-1}(p)q^{-s})\right\}^{-1},\end{aligned}$$

$$A_{\rho,\mathfrak{p}}(s) = \begin{cases} 1 & (n_0, \partial) = (0,0) \text{ or } (1,0) \\ 1+\lambda_0 q^{-(s-1/2)} & (n_0, \partial) = (1,1) \\ (1-q^{-2s})^{-1} & (n_0, \partial) = (2,0) \\ (1-\lambda_0 q^{-s})^{-1} & (n_0, \partial) = (2,1) \\ (1-\lambda_0 q^{-s})^{-1}(1+\lambda_0 q^{-(s-1)}) & (n_0, \partial) = (2,2) \\ (1-\lambda_0 q^{-(s+1/2)})^{-1} & (n_0, \partial) = (3,1) \\ (1-\lambda_0 q^{-(s+1/2)})^{-1}(1+\lambda_0 q^{-(s-1/2)}) & (n_0, \partial) = (3,2) \\ (1-\lambda_0 q^{-s})^{-1}(1-\lambda_0 q^{-(s+1)})^{-1} & (n_0, \partial) = (4,2) \text{ and } \lambda_0 \neq 0 \\ (1-q^{-2s})^{-1} & (n_0, \partial) = (4,2) \text{ and } \lambda_0 = 0. \end{cases}$$

ここで，$n_0 = m - 2\nu$, $\partial = \dim_{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}} L'/\mathfrak{o}^m$, $L' = \{x \in S^{-1}\cdot \mathfrak{o}^m \,|\, {}^t x S x \in 2\mathfrak{p}^{-1}\}$ であり，p で $\mathfrak{o}$ の素元を表した．また，$\lambda_0 = \lambda_0(\rho)$ は，ρ が trivial 表現のとき 1 を, E の指数 2 の部分群上 trivial な表現の場合には -1 を，それ以外は 0 を表す．

$m+1$ 次の $\mathfrak{p}$-maximal 偶対称行列でその左上 $m \times m$ ブロックが S となる $\underline{S} = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -{}^t\alpha S & -2a \end{bmatrix}$ を考え，その直交群を $\underline{G}$ で表す．また $\underline{K}$ 及び $\underline{K}^*$ を同様に定義する．G を $\underline{G}$ に $\iota_0(g) = \begin{bmatrix} g & (1-g)\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ により埋め込むと，$\iota_0(K^*) = \underline{K}^* \cap \iota_0(G)$ が成立する．なお，この関係は K と $\underline{K}$ については一般には成り立たないことに注意（これが Hecke algebra が非可換となるにもかかわらず K^* をとった主な理由）．Hecke 環の中心 $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}(G, K^*)^+$ の指標 λ と，$\underline{\mathcal{H}}^+ = \mathcal{H}(\underline{G}, \underline{K}^*)^+$ の指標 Λ に対し，local Shintani functions の空間が,

$$\mathrm{Sh}(\lambda, \Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ W : K^* \backslash \underline{G} / \underline{K}^* \longrightarrow \boldsymbol{C} \,\middle|\, \phi * W * \Phi = \lambda(\phi)\Lambda(\Phi)W, \quad \phi \in \mathcal{H}^+, \Phi \in \underline{\mathcal{H}}^+ \right\}$$

と定義される．ここで,

$$\phi * W * \Phi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \int_{\underline{G}} \phi(x)\Phi(y)W(xgy^{-1})dxdy, \quad \mathrm{vol}(K^*) = \mathrm{vol}(\underline{K}^*) = 1.$$

Part I にあるように，$G, \underline{G}$ がともに split していて，$2^{-1}\det S \det \underline{S} \in \mathfrak{o}^\times$ ならば，この空間は 1 次元であり，その explicit formula も分かっている (cf. [1])．Witt index を一つ上げた

$$S_1 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & S & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

の直交群を G_1 とし，その部分群 K_1, K_1^* を同様に定義する．$\iota : \underline{G} \longrightarrow G_1$ を，像が $\eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ の固定化部分群となるように定める．また G_1 の岩沢分解を,

$$g = \begin{bmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \alpha(g)^{-1} \end{bmatrix} u(g), \quad u(g) \in K_1^*$$

と書くことにする．次の命題はL関数の一つの積分表示を与えている．

Proposition 1 $W\in \mathrm{Sh}(\lambda,\Lambda)$ に対し，

$$\int_{G\backslash \underline{G}} W(\beta(h)^{-1}h)|\alpha(h)|_{\mathfrak{p}}^{s+(m-1)/2}dh = W(1)\frac{L_{\mathfrak{p}}(\Lambda;s)}{L_{\mathfrak{p}}(\lambda;s+1/2)}\times\begin{cases}1 & m:\mathrm{even}\\ 1-q^{-2s} & m:\mathrm{odd.}\end{cases}$$

§ 2. Rankin-Selberg convolution

以下，k を n 次の総実代数体，$\mathfrak{o}_k$ をその整数環とする．m 次の総正定値偶対称行列 S が，全ての有限素点 $\mathfrak{p}$ に於いて前§の意味で $\mathfrak{p}$-maximal であるとき，単に S は maximal であるという．S の直交群 G の素点 v での完備化を G_v で表し，前§導入した開コンパクト部分群を K_v, K_v^* で表す（アルキメデス的素点 v に対しては，$K_v=K_v^*=G_v$ と解釈する）．全ての素点 v についての K_v^* の直積 K_A^* に保型形式の空間

$$\mathfrak{S}(K_A^*)\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{f: G_k\backslash G_A/K_A^*\longrightarrow \boldsymbol{C}\right\}$$

を考える．この空間には，convolution により $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^+=\mathcal{H}(G_{\mathfrak{p}},K_{\mathfrak{p}}^*)^+$ が可換正規に作用しており，同時固有関数からなる基底を持つ．$f\in\mathfrak{S}(K_A^*)$ が，$\otimes'_{\mathfrak{p}}\mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^+$ の同時固有関数 (Hecke eigen form)

$$f*\phi=\lambda_f(\phi)f \quad ({}^\forall\phi\in\otimes'_{\mathfrak{p}}\mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^+)$$

であるとき，大域的なL関数 $L(f;s)$ 及び gamma factor $L_\infty(f;s)$ を

$$\begin{aligned}L(f;s) &= \prod_{\mathfrak{p}<\infty}L_p(\lambda_f;s),\\ L_\infty(f;s) &= |d_k|^{[m/2]s}\left((2\pi)^{-[m/2]s}\prod_{j=1}^{[m/2]}\Gamma(s-j+m/2)\right)^n\\ &\qquad\times\begin{cases}(N_{k/\boldsymbol{Q}}(\det S))^{s/2} & m:偶数\\ (N_{k/\boldsymbol{Q}}(2^{-1}\det S))^{s/2} & m:奇数\end{cases}\end{aligned}$$

で定義する（d_k は k の絶対判別式）．

我々の目標は，$\xi(f;s)=L_\infty(f;s)L(f;s)$ の解析接続・関数等式についての次の定理にある．

Theorem 1 $f\in\mathfrak{S}(K_A^*)$ を Hecke eigen form とする．このとき，

(1) $\xi(f;s)$ は全 s-平面に有理型関数として解析接続され，$s\longrightarrow 1-s$ で不変．

(2) $\xi(f;s)$ は $s=2/m-j$ $(0\le j\le m-1)$ で高々 simple pole をもつ他では正則．

(3) $\xi(f;s)$ が $s=m/2$ で本当に極をもつ必要十分条件は，f が定数関数であること．

Remark 1 (3) において $\xi(f;s)$ の最大 possible pole $(s=1/m)$ の特徴付けが与えられているが，その他の possible poles での挙動は不明．これらの点における正則性または pole の意味付けを与えることは興味深い問題と思われる．

$m+1$ 次の直交群を，新谷関数を用いて m 次の直交群と（大域的に）関連付ける為に，一つ準備を行う．証明は，良く知られた二元二次形式による数の表示についての事実

（これは二次拡大体の L 関数の $s=1$ での挙動からの帰結）と，特殊線型群に対する強近似定理から従う．

Proposition 2 $T \in M_{m+1}(\mathfrak{o}_k)$ を $m+1$ 次の総正定値 maximal 偶対称行列とする．このとき，m 次 maximal 偶対称行列 S と，$\gamma \in SL_{m+1}(\mathfrak{o}_k)$ で，

$$ {}^t\gamma T\gamma = \underline{S} = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -{}^t\alpha S & -2a \end{bmatrix} $$

となるものが存在する．

以下，m 次の場合に Theorem 1 が成立しているとする．上の命題より，$m+1$ 次の総正定値 maximal 偶対称行列 T の直交群上の Hecke eigen form F に対する主張を確かめるためには，$T=\underline{S}$ 及び $F(1)\neq 0$ として一般性を失わない．このとき，Hecke eigen form $f \in \mathfrak{S}(K_A^*)$ で Petersson 内積 $\langle F|_{G_A}, \overline{f}\rangle_G \neq 0$ となるものが存在する．

$m+2$ 次の直交群 G_1 上の（f に付随した）Eisenstein 級数を

$$ E(g,f;s) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\gamma \in P_{1,k}\backslash G_{1,k}} f(\beta(\gamma g))|\alpha(\gamma g)|_A^{s+m/2} \quad (g \in G_{1,A}) $$

により定義する．ここで，P_1 は G_1 の上三角型の放物部分群であり，アルキメデス素点 v での $G_{1,v}$ の極大コンパクト部分群 $K_{1,v}^*$ として $\eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ の固定化部分群をとった岩沢分解 $G_{1,A} = P_{1,A}K_{1,A}^*$ を

$$ g = \begin{bmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \alpha(g)^{-1} \end{bmatrix} u(g) \quad (g \in G_{1,A}) $$

で表した．記述を簡単にするため，normalizing factor

$$ d(f;s) = |N_{k/\boldsymbol{Q}}(a+S[\alpha]/2)|^{s/2}\xi(f;s+1) \times \begin{cases} 1 & m:\text{even} \\ \xi_k(2s+1) & m:\text{odd} \end{cases} $$

（$\xi_k(s)$ は，k の completed Dedekind zeta 関数）

を乗じた $E^*(g,f;s) = d(f;s)E(g,f;s)$ を用いる．E^* は全 s-平面に有理型関数として解析接続され，関数等式

$$ E^*(g,;f;s) = \frac{\xi(f;s)}{\xi(f;1-s)}E^*(g,f;-s) $$

を満たすことが分かる（帰納法の仮定より，右辺の最初の因子は 1 となる）．

Proposition 3 (Basic Identity) $F \in \mathfrak{S}(\underline{K}_A^*), f \in \mathfrak{S}(K_A^*)$ に対し，

$$ \int_{\underline{G}_k\backslash \underline{G}_A} F(h)E^*(\iota(h),f;s-1/2)dh = d(f;s-1/2)\int_{G_A\backslash \underline{G}_A} W_{F,f}(\beta(h)^{-1}h)|\alpha(h)|_A^{s+(m-1)/2}dh $$

が成立する．ここで，$W_{F,f}$ は次の global 新谷関数

$$W_{F,f}(h)=\int_{G_k\backslash G_A}F(\iota_0(g)h)f(g)dg \quad (h\in \underline{G}_A).$$

$F*\Phi=\lambda_F(\Phi)F \ \ (\Phi\in\underline{\mathcal{H}}_{\mathfrak{p}}^{+})$，$f*\phi=\lambda_f(\phi)f \ (\phi\in\mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^{+})$ を満たすならば，$W_{F,f}$ は $\underline{G}_{\mathfrak{p}}$ 上の関数として，前§で導入した局所新谷関数の空間 $\mathrm{Sh}(\lambda_f,\lambda_F)$ に属する．従って，F,f が Hecke eigen form ならば，Proposition 1 と Proposition 3 により，

$$\langle F,\overline{E^*(*,f;s-1/2)}\rangle_{\underline{G}}=\xi(F;s)\cdot\langle F|_{G_A},\overline{f}\rangle_G$$

が成立する．ここで $\langle\ ,\ \rangle_{\underline{G}},\langle\ ,\ \rangle_G$ は，それぞれ $\mathfrak{S}(\underline{K}_A^*),\mathfrak{S}(K_A^*)$ の Petersson 内積．仮定より，$\langle F|_{G_A},\overline{f}\rangle_G\neq 0$ ゆえ，$\xi(F;s)$ の解析接続・解析接続が Eisenstein 級数のそれから得られ，証明が終わる．

Remark 2 $\underline{S}=\begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -{}^t\alpha S & -2a\end{bmatrix}\in M_{m+1}(\mathfrak{o}_k)$ とし，$F\in\mathfrak{S}(\underline{K}_A^*),f\in\mathfrak{S}(K_A^*)$ を Hecke eigen form とする．$\{\,g_i\mid 1\le i\le h=h(S)\,\}$ を $G_k\backslash G_A/K_A^*$ の完全代表系とするとき，

$$W_{F,f}(1)=\langle F|_{G_A},\overline{f}\rangle=\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{e_i}F(g_i)f(g_i),\quad e_i=\#(G_k\cap g_iK_A^*g_i^{-1})$$

である．特に，$f=\mathbf{1}$ を G_A 上つねに 1 となる関数にとれば，$W_{f,\mathbf{1}}$ は左 G_A 不変な新谷関数となる．従って [3, §1.13] より，$W_{F,\mathbf{1}}(1)\neq 0$ のとき，

$$L(F;s)=L'(s)\prod_{j=1}^{m-2}\zeta_k(s-(m-1)/2+j)\times\begin{cases}L(\chi_K;s) & m+1:\mathrm{even}\\ 1 & m+1:\mathrm{odd}\end{cases}$$

と分解されることがわかる．ここで，ζ_k は k の Dedekind zeta 関数，$L(\chi_K;s)$ は k の 2 次拡大 $K=k(\sqrt{(-1)^{(m+1)/2}\det S})$ に対応する Dirichlet 指標の L 関数であり，$L'(s)$ は殆ど 2 次の Euler 積．即ち，F の L 関数が（本質的に parameter が 1 個にまで）大幅に退化する．特に，$h(S)=1$ ならば $F(1)\neq 0$ なる任意の F はこの形となる．

Example 1 (cf. 立川 [10]) $\boldsymbol{Q}$ 上の 5 次の正定値偶対称行列で，行列式が 74 であるものを考える．これは，maximal で唯一つの genus からなる．この genus の $GL_5(\boldsymbol{Z})$ 同値類の一つの完全代表系は，

$$T_1=\begin{bmatrix}2&1&1&1&1\\1&2&0&0&0\\1&0&2&1&0\\1&0&1&2&0\\1&0&0&0&16\end{bmatrix},T_2=\begin{bmatrix}2&1&1&0&1\\1&2&0&0&0\\1&0&2&0&1\\0&0&0&2&0\\1&0&1&0&10\end{bmatrix},T_3=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\1&2&0&0&0\\1&0&2&1&0\\1&0&1&4&1\\0&0&0&1&6\end{bmatrix},$$

$$T_4=\begin{bmatrix}2&1&0&1&1\\1&2&0&0&0\\0&0&2&-1&-1\\1&0&-1&4&0\\1&0&-1&0&6\end{bmatrix},T_5=\begin{bmatrix}2&1&0&1&0\\1&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\1&0&0&4&1\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$$

で与えられる．$S=T_1$ の直交群を G で表す．今の場合，$\#(G_{\boldsymbol{Q}}\backslash G_A/K_A^*)=\#(G_{\boldsymbol{Q}}\backslash G_A/K_A)$ ゆえ，$\dim_{\boldsymbol{C}}\mathfrak{S}(K_A^*)=5$. Hecke eigen basis は，

$$\{F_0=\mathbf{1},\ F_\alpha \mid \alpha^4-18\alpha^3+107\alpha^2-220\alpha+66=0\}$$

で与えられる．$F_0(1)\neq 0, F_\alpha(1)\neq 0$ であることが分かり，上の Remark より，L 関数は全て退化している．$p=2,3$ のときの local factor は，

$$\begin{aligned} L_2(F;s)^{-1} &= (1-2^{-s-1/2})(1-2^{-s+1/2})\times\begin{cases}(1-2^{-s-3/2})(1-2^{-s+3/2}) & F=F_0\\ 1+(6-\alpha)\,2^{-s-3/2}+2^{-2s} & F=F_\alpha\end{cases}\\ L_3(F;s)^{-1} &= (1-3^{-s-1/2})(1-3^{-s+1/2})\times\begin{cases}(1-3^{-s-3/2})(1-3^{-s+3/2}) & F=F_0\\ 1+\beta\,3^{-s-3/2}+3^{-2s} & F=F_\alpha\end{cases}\end{aligned}$$

となる．ここで，$\beta=\{\alpha^3-9\alpha^2+26\alpha-26\}/8$ で，これは，$\beta^4-11\beta^3+6\beta^2+89\beta+23=0$ の根.

§ 3. unitary 群の場合

k を虚 2 次体，S を非退化な m 次の skew hermitian matrix とし，G を S のユニタリ群とする．全ての有限素点 p において，$(\mathfrak{o}_{k,p})^m$ が S に関して maximal integral lattice であると仮定する．§1 と同様に，$G_p\supset K_p \triangleright K_p^*$ が定義され，local Hecke algebra $\mathcal{H}_p=\mathcal{H}(G_p,K_p^*)$ の構造が決定される．また，その中心 $\mathcal{H}_p^+$ の指標 λ_p に対して，local standard L 関数 $L_p(\lambda_p,s)$ が定義される（殆ど全ての p に対して，分母が p^{-s} の $2m$ 次式）．

$G_\infty=G_{\boldsymbol{R}}$ の極大コンパクト群を K_∞ とすると，良く知られているように $\mathcal{X}=G_\infty/K_\infty$ は hermitian symmetric domain となる．G_∞ の $\mathcal{X}$ への作用に関する自然な正則保型因子を $J_G(g,X)$ $(g\in G_\infty, X\in\mathcal{X})$ で表し，$\chi_{K_\infty}(u)=\det J_G(u,X_0)$ $(u\in K_\infty=X_0$の固定化部分群$)$ とおく．$K_{A,f}^*=\prod_{p<\infty}K_p^*$ に関する weight $l\in\boldsymbol{N}$ の正則尖点形式の空間を

$$\mathfrak{S}_l(K_{A,f}^*)=\left\{f:G_{\boldsymbol{Q}}\backslash G_A/K_{A,f}^*\longrightarrow\boldsymbol{C}\;\middle|\;\begin{array}{l}f(gu)=\chi_{K_\infty}(u)^{-l}f(g)\ {}^\forall u\in K_\infty\\ \text{bounded},\quad \mathcal{X}\text{上で正則}\end{array}\right\}$$

で定義する（l は $\#(\mathfrak{o}_k^\times)$ の倍数とする）．

以下，$K_A^\times$ の不分岐量指標 $\omega=\prod_v\omega_v$ で，$\omega_\infty(x)=(x/|x|)^l$ となるものを一つ固定する．Hecke eigen form $f\in\mathfrak{S}(K_{A,f}^*), f*\phi=\lambda_f(\phi)f$ $(\phi\in\otimes'\mathcal{H}_p^+)$ に対し，次の global L 関数

$$L(f\otimes\omega;s)\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{p<\infty}L_p(\lambda_f\otimes\omega_p;s)$$

を考える．ここで，$L_p(\lambda_f\otimes\omega_p;s)$ は，λ_f の Satake parameter を ω_p で twist して得られる local L 関数である (cf. [9], [2]).

有限素点での新谷関数については，直交群の場合と同様の結果が得られる．特に split prime p では，$G_p\cong GL_m(\boldsymbol{Q}_p)$ であり，存在と一意性が分かっている（cf. [4]）．無限素点

に関して簡単に述べよう．

$$\mathcal{H}_l^\infty(G_\infty, K_\infty) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ f : G_\infty \longrightarrow \boldsymbol{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(gu) = \chi(u)^{-l} f(g) \quad {}^\forall u \in K_\infty \\ \text{bounded かつ } \mathcal{X} \text{ 上正則} \end{array} \right\}$$

とおくと，$\mathfrak{S}(K_{A,f}^*) \subset \mathcal{H}_l^\infty$ であり，十分大なる l に対しては，

$$\begin{aligned} \omega_{G,l}(u_1 g u_2) &= \chi_{K_\infty}(u_1)^{-l} \chi_{K_\infty}(u_2)^{-l} \omega_{g,l}(g) \quad ({}^\forall u_1, {}^\forall u_2 \in K_\infty) \\ f(g) &= \int_{G_\infty} f(x) \omega_{G,l}(x^{-1} g) dx \quad ({}^\forall f \in \mathcal{H}_l^\infty) \end{aligned}$$

となる G_∞ 上の $\boldsymbol{C}$-値関数が唯一つ存在する．我々の扱う正則尖点形式の場合には，この $\omega_{G,l}$ が Bergman 核関数として具体的に分かるため，有限素点に平行な議論によって，必要な結果を得ることになる．

さて，$\underline{S} = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -\alpha^* S & \overline{a} - a \end{bmatrix}$ を $m+1$ 次の非退化 skew hermitian matrix で S と同様な maximality condition を満たし，左上 $m \times m$ 行列が S であるものをとり，ユニタリ群 $\underline{G} = U(\underline{S})$ を考える．$\underline{K}_\infty$ を，$\underline{G}_\infty$ の極大コンパクト部分群で，$G_\infty \cap \underline{K}_\infty = K_\infty$，$\chi_{\underline{K}_\infty}|_{K_\infty} = \chi_{K_\infty}$ なるものとする．無限素点での local Shintani function の空間が，

$$\mathrm{Sh}_\infty(l) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ W : \underline{G}_\infty \longrightarrow \boldsymbol{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} W(u_1 h u_2) = \overline{\chi_{K_\infty}(u_1)}^{-l} \chi_{\underline{K}_\infty}(u_2)^{-l} W(h) \quad {}^\forall u_1, u_2 \\ W \in \mathcal{H}_l^\infty(\underline{G}_\infty, \underline{K}_\infty),\ W_{x_0} \in \mathcal{H}_l^\infty \end{array} \right\}$$

により定義される．ここで，$x_0 \in \underline{G}_\infty$ に対し，$W_{x_0}(y) = \overline{W(x_0^{-1} y)}$ $(y \in G_\infty)$ とおいた．

$$S_1 = \begin{bmatrix} & & -1 \\ & S & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおき，S_1 のユニタリ群を G_1 に G を η の固定化部分群として埋め込む．

Proposition 4 l を十分大とするとき，$W \in \mathrm{Sh}_\infty(l)$ に対し，

$$\begin{aligned} &\int_{G_\infty \backslash \underline{G}_\infty} W(\beta(h)^{-1} h) \omega_{s+m/2}(\alpha(h)/|\alpha(h)|)^l \chi_1(u(h))^l dh \\ &= W(1)\Gamma(s + (l-m)/2) \times \begin{cases} \Gamma(s + (l - n_0)/2)^{-1} & i \det \underline{S} / \det S > 0 \\ \Gamma(s + (l + n_0)/2)^{-1} & i \det \underline{S} / \det S < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで，$\alpha(h), \beta(h), u(h)$ は，§1 と同様に G_1 の岩沢分解に現れる量であり，$G_{1,\infty}$ の極大コンパクト群 $K_{1,\infty}$ の指標 $\chi_{K_{1,\infty}}$ を上と同様に定義した．また，$x \in k_A^\times$ に対し，$\omega_s(x) = \omega(x)|x|_{k_A}^s$ とおいた．

最後に Eisenstein 級数を導入して，Baisic Identity を述べよう．$g \in G_{1,A}, f \in \mathfrak{S}_l(K_{A,f}^*)$ に対して，

$$E(g, \overline{f}; s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\gamma \in P_{1,\boldsymbol{Q}} \backslash G_{1,\boldsymbol{Q}}} \overline{f(\beta(\gamma g))} \omega_{s+(m+1)/2}(\alpha(\gamma g)) \chi_{K_{1,\infty}}(u(\gamma g))$$

とおく．さらに，f が Hecke eigen form の場合に，normalizing factor を乗じたものを，$E^*(g,\overline{f};s)$ で表す．

gamma factor を

$$L_\infty(f;s)=(2\pi)^{-ms}|\det S|^s|d_k|^{[m/2]s}\prod_{j=1}^{\nu}\Gamma(s-j+(l-n_0+1)/2)\prod_{j=1}^{n_0+\nu}\Gamma(s-j+(l+n_0+1)/2)$$

として，completed L 関数を，$\xi(f;s)=L_\infty(f;s)L(f;s)$ で定める．

Theorem 2 $F\in\mathfrak{S}(\underline{K}^*_{A,f}), f\in\mathfrak{S}(K^*_{A,f})$ をともに Hecke eigen form とし，l を十分大としておく．このとき，

$$\langle F,\overline{E^*(*,\overline{f};\omega_{s-1/2})}\rangle_{\underline{G}}=\xi(F\otimes\omega;s)\langle F|_{G_A},f\rangle_G.$$

Example 2 $S=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ で，虚二次体 k の類数が 1 だとする．$f\in\mathfrak{S}(K^*_{A,f})$ を上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の関数とみた $f^{\mathrm{dm}}(z)$ は，通常の一変数保型形式に他ならない．

$$f^{\mathrm{dm}}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{2\pi iz}\quad(z\in\mathfrak{H})$$

と Fourier 展開し，Mellin 変換による Dirichlet 級数

$$\begin{aligned}\Lambda(f^{\mathrm{dm}};s)&=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}\\ \Lambda(f^{\mathrm{dm}}\otimes\chi_k;s)&=(2\pi)^{-s}|d_k|^s\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\chi_k(n)n^{-s}\end{aligned}$$

を考える（χ_k は $k/\boldsymbol{Q}$ に対応する Dirichlet 指標）．f^{dm} が通常の意味で Hecke 作用素の同時固有関数であるならば，f は G_A 上の Hecke eigen form であり，上で定義した $\xi(f\otimes\omega;s)$ は定数倍を除き，$\Lambda(f^{\mathrm{dm}};s+(l-1)/2)\Lambda(f^{\mathrm{dm}}\otimes\chi_k;s+(l-1)/2)$ に一致する．

Example 3 $k=\boldsymbol{Q}(i)$, $\underline{S}=\begin{bmatrix}&-1&\\1&&\\&&-2i\end{bmatrix}$ とする．$F\in\mathfrak{S}_l(\underline{K}^*_{A,f})$ は，領域 $\{\,(z,w)\in\mathfrak{H}\times\boldsymbol{C}\mid\mathrm{Im}\,z>|w|^2\,\}$ の正則尖点形式 F^{dm} と同一視される．[7] において graded ring の構造が決定されており，$l=8$ の場合，$F^{\mathrm{dm}}(z,0)=0$ となることが分かる．即ち，Theorem 2 の右辺の内積が消える．従って，L 関数の情報を取り出すには，定値直交群に対して Proposition 2 で行ったように，form $\underline{S}$ を取り替える必要がある．なお，$l=12$ の場合には，少なくとも一つの Hecke eigen form に対しては内積が消えないことも [7] から分かる．

References

[1] S. Kato and A. Murase : in preparation.

[2] S. Kudla : On certain Euler products for $SU(2,1)$, Comp. Math. 42 (1981), 321-344.

[3] A. Murase and T. Sugano : Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups : I. The orthogonal groups case, Math. Ann. 299 (1994), 17-56.

[4] A. Murase and T. Sugano : Shintani functions and automorphic L-functions for $GL(m)$, to appear in Tôhoku Math. J.

[5] A. Murase and T. Sugano : On standard L-functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups, preprint.

[6] A. Murase and T. Sugano : L-functions of holomorphic cusp forms on $U(2,1)$, preprint.

[7] Resnikoff and Tai : On the structure of a graded ring of automorphic forms on 2-dimensional complex ball, Math. Ann. 238 (1978), 97-117.

[8] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, I.H.E.S. Publ. Math. 18 (1963), 5-69.

[9] T. Shintani : On automorphic forms on unitary groups of order 3, preprint.

[10] 立川秀樹：正定値直交群上の保型形式と L 関数，広島大学修士論文，1995.